Отд. оттиск из «Бюллетеня Ср.-Аз. Гос. Ун-та» № 11. 1925 г.

Извлечение квадратных и кубических корней из чисел с помощью арифмометра. [1]

А. Н. Николаев.

При растущем проникновении науки в технику сильно растет необходимость в производстве численных подсчетов по данным формулам, что с своей стороны выдвигает требование возможно большей быстроты и простоты вычислений. Идеалом такой простоты была бы полная «механизация» вычислений, при которой все вычисление делалось бы механически в двояком смысле этого слова: или такими приемами, которые позволили бы свести работу вычислителя к простому переписыванию результатов вспомогательных вычислений, пользуясь всякими таблицами, или при посредстве настоящих механизмов, работа которых заменяла бы вычислительную работу человека, а на долю вычислителя оставалась бы работа лишь по установке аппарата и, может быть, какое-нибудь простое действие вроде вращения рукоятки (которое, однако, в дальнейшем могло бы быть переложено, напр., на электродвигатель). Одним из приближений к такому идеалу является арифмометр, достаточно распространенный и у нас в СССР среди лиц, имеющих дело с более или менее сложными вычислениями.

Первой задачей арифмометра является производство действий сложения и вычитания. Но поскольку умножение есть повторное сложение и деление— повторное вычитание, постольку арифмометр может быть применим и к производству умножения и деления. Далее, возвышение в целую степень (положительную или отрицательную) есть повторное умножение (или деление); поэтому арифмометр применим и здесь.

Действие же извлечения корней не сводится так просто к предыдущим действиям, и поэтому способы производства этого действия при помощи арифмометра не так известны, как для указанных выше. Всякое же упрощение этих способов даст больший простор работе арифмометра и тем увеличит ценность этого аппарата. Вот почему я позволяю себе предложить вниманию интересующихся лиц простые (и в значительной степени «механические») способы извлечения корней 2-й и 3-й степени и, при повторном применении этих способов, корней 4-й, 6-й, 8-й, 9-й, 12-й, вообще степени 2^k, 3^l, где k и l любые целые положительные числа.

1. Извлечение квадратных корней.

§ 1. Создадим две последовательности рациональных чисел:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ldots,\ a_n,\ \ldots\ldots$$

$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots\ldots,\ b_n,\ \ldots\ldots,$$

[1] Содержание первых шести параграфов доложено в заседании Физико-Математической секции Туркестанского Научного Общества 26-XII 1924 г.

первые члены которых некоторые числа (ограничиваемся случаем положительных чисел), а остальные вычисляются по закону:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, \quad b_n = \frac{2\,a_{n-1}\,b_{n-1}}{a_{n-1} + b_{n-1}} = \frac{a_{n-1}\,b_{n-1}}{a_n} \quad (n = 2,3,4,\ldots) \quad (2)$$

Относительно этих последовательностей можно показать: 1) что они монотонны (первая убывающая и вторая возрастающая), 2) что они нормальны, 3) что они имеют общий предел и 4) что этот общий предел есть $\sqrt{a_1 \cdot b_1}$. Следовательно, если мы будем вычислять последовательно числа a_2, b_2; a_3, b_3,..., то будем получать числа, все более и более приближающиеся по своему значению к числу $\sqrt{a_1 \cdot b_1}$.

Чтобы воспользоваться последовательностями (1) для вычисления квадратного корня из данного числа N, нужно во-первых подобрать такие два числа a_1 и b_1, чтобы было

$$a_1 \cdot b_1 = N, \qquad (3)$$

и во-вторых вычислять по (2) числа a_2, b_2, a_3, b_3, ... Из (3) видно, что одно из чисел a_1 или b_1 может быть взято совершенно произвольно; тогда другое определится частным от деления данного подкоренного числа на это произвольно взятое. Чтобы с самого начала сохранить убывание первой из последовательностей (1) и возрастание второй, условимся принимать за a, большее из только что указанных чисел и за b_2 меньшее (хотя это условие совершенно не обязательное). Понятно, что мы быстрее получим нужный результат, если то произвольное число, о котором только что говорили, возьмем поближе к значению $\sqrt{N}$, что можно сделать или из непосредственного рассмотрения числа N, или при помощи таблиц квадратов чисел, или еще разными способами.

§ 2.—Пусть для примера требуется найти $\sqrt{13}$. Так как прямо видно, что

$$3 < \sqrt{13} < 4,$$

то возьмем $a_1 = 4$; тогда $b = \frac{N}{a_1} = \frac{13}{4} = 3{,}25.$

Пишем теперь последовательности (1):

$$4; \quad \frac{4+3.25}{2} = 3{,}625\;; \quad \frac{3{,}625+3{,}586\,2}{2} = 3{,}605\,6; \quad \frac{3{,}605\,6+3{,}605\,5}{2} = 3{,}605\,55$$

$$3{,}25; \quad \frac{13}{3{,}625} = 3{,}586\,2\ \ldots\;; \quad \frac{13}{3{,}6056} = 3{,}605\,5\ \ldots\;; \quad \frac{13}{3{,}605\,55} = 3{,}605\ 55\ \ldots$$

Таким образом можем писать

$$\sqrt{13} = 3{,}605\,55$$

с точностью до единицы пятого десятичного знака.

Тех равенств, которые выписаны в предыдущих строчках, нет надобности писать, потому что нахождение среднего арифметического двух близких чисел легко делается в уме; деления же производятся при помощи арифмометра. При делении достаточно в частном брать столько цифр, сколько их должно быть в корне (или на одну больше). Желая, напр., найти значение $\sqrt{13}$ с шестью знаками после запятой, будем вычислять после запятой семь цифр; тогда наши последовательности примут вид:

a	4 ;	3,625 ;	3,605 603 4;	3,605 551 3;
b	3,25;	3,586 206 8;	3,605 499 1;	3,605 551 2.

След., $\sqrt{13} = 3,605\ 551$ с шестью верными десятичными знаками.

§ 3.—Мы уже говорили, что чем ближе a_1 к значению корня, тем быстрее получается нужный результат. Положим, что требуется найти $\sqrt{2}$ с восемью десятичными знаками. Из более подробных таблиц квадратов (или таблиц квадратных корней) мы можем увидеть, что

$$1,4142 < \sqrt{2} < 1,4143.$$

Поэтому примем $a_1 = 1,4143$ и тогда получим:

a	1,414 3 ;	1,414 213 57;	1,414 213 56.
b	1,414 127 13;	1,414 213 55;	

Итак, значение $\sqrt{2} = 1,414\ 213\ 56$ с точностью до 10^{-8} мы получили уже после второго деления. Третьего деления (2:1,414 213 56) нет смысла делать, так как оно нового (в пределах первых восьми десятичных знаков) нам ничего не даст, потому что это частное должно быть меньшим, чем 1,414 213 56, но большим, чем 1,414 213 35.

§ 4.—Изо всего сказанного вытекает, таким образом, следующее правило извлечения квадратного корня с помощью арифмометра:

Чтобы извлечь квадратный корень из данного числа с заданной точностью, нужно, определив первое (более грубое) приближенное значение этого корня, разделить (арифмометр!) на него данное подкоренное число, взяв в частном не меньше цифр, чем сколько их должно быть в корне. Затем найти среднее арифметическое (в уме!) между взятым делителем и найденным частным. Потом вновь разделить (арифмометр!) подкоренное число на это среднее арифметическое (опять с нужным числом десятичных знаков); вновь взять среднее арифметическое между делителем и частным и поступать так до тех пор, пока в делителе и получающемся частном не будет столько одинаковых первых цифр после запятой, сколько их, вообще, должно быть в корне. Тогда десятичная дробь, имеющая после запятой все эти общие цифры (понятно, что и целые части этих дробей также будут одинаковыми) и будет представлять искомый корень с заданной точностью.

Изложенный способ может быть назван механическим не только потому, что при нем искомое число получается в результате простых механических действий с арифмометром, но и потому (и это более существенно), что он механически дает возможность контролировать весь процесс вычисления и механически же оценивать точность результата.

§ 5.—Если подкоренное число есть приближенное, то предварительно приходится решать один из двух вопросов:

с какой наибольшей точностью может быть получен результат, или

с какой точностью должно быть взято подкоренное число, чтобы результат мог быть получен с заданной наперед точностью.

Обозначив через N приближенное значение подкоренного числа, через ΔN погрешность этого приближения и через ε точность результата, по формулам приближенных вычислений найдем:

$$\varepsilon = \frac{1,1 \cdot \Delta N}{\sqrt{N}} \tag{4}$$

для первого вопроса и

$$\Delta N = \frac{\varepsilon \sqrt{N}}{1,1} = 0,9\, \varepsilon \sqrt{N} \tag{5}$$

для второго, причем выражения (4) и (5) дают «верхние пределы» для ε и для ΔN.

Вычислим для примера $\sqrt{e}$ с точностью до 10^{-8}. Имеем: $N = 2{,}718\,281\,828\,45\ldots$, $\varepsilon = 10^{-8}$. Тогда по (5) имеем

$$\Delta N = 0{,}9\,.\,\varepsilon\,.\,\sqrt{N} = 0{,}9\,.\,10^{-8}.\,1 = 0{,}5\,.\,10^{-8}.$$

Беря $\sqrt{N} = \sqrt{2{,}818\ldots} = 1$, мы *понижаем* верхний предел погрешности ΔN; то же мы делаем, округляя результат числом $0{,}5\,.\,10^{-8}$. Полученное для ΔN значение говорит, что подкоренное число должно быть «ближайшим» из двух приближенных значений, взятых с точностью до 10^{-8}. Таким образом, берем $e = 2{,}718\,281\,83$. В таблице квадратов чисел находим, что $1{,}64^2 = 2{,}689\,6$ и $1{,}65^2 = 2{,}722\,5$, т. е. что

$$1{,}64 < \sqrt{e} < 1{,}65.$$

Поэтому за a, принимаем 1,65. Изложенным выше приемом вычисляем:

$$\begin{array}{c|l} a & 1{,}65\qquad\qquad;\ 1{,}648\,721\,77;\ 1{,}648\,721\,27; \\ b & 1{,}647\,443\,53;\ 1{,}648\,720\,77;\ 1{,}648\,721\,27; \end{array}$$

след., можем писать

$$\sqrt{e} = 1{,}648\,721\,27$$

с точностью до 10^{-8}. Контрольное вычисление значения $\sqrt{e}$ с помощью рядов дает

$$\sqrt{e} = 1{,}648\,721\,271\,1\ldots.$$

2. Извлечение корней 4-й, 8-й и т. д. степеней.

§ 6.—Повторным применением изложенного выше приема можем вычислять корни 4-й, 8-й, 16 и т. д. степеней. Для подсчета точности результата и степени приближения подкоренного числа пользуемся формулами, аналогичными (4) и (5):

$$\varepsilon = \frac{2{,}2\,.\,\Delta N}{n\sqrt[n]{N^{n-1}}} \qquad (6)$$

и

$$\Delta N = \frac{n\,\varepsilon\sqrt[n]{N^{n-1}}}{2{,}2} = 0{,}4\,n\,\varepsilon\sqrt[n]{N^{n-1}}, \qquad (7)$$

где каждая из букв ε, N и ΔN имеет прежнее значение, а k — показатель корня, т. е. в данном случае $n = 4, 8, 16, \ldots\ldots$ вообще $n = 2^k$ $(k = 2, 3, 4, \ldots)$.

Пусть, для примера, требуется найти значение $\sqrt[8]{\pi}$ с точностью до 10^{-8}. Тогда по (7) имеем:

$$\Delta N = 0{,}4\,.\,8\,.\,10^{-8}.\,1 = 3{,}2\,.\,10^{-8} = 10^{-8},$$

откуда видим, что и подкоренное число можем брать также с восемью знаками после запятой, т. е. полагать $\pi = 3{,}141\,592\,65$. По таблицам имеем

$$1{,}77 < \sqrt{\pi} < 1{,}78;$$

след., $a_1 = 1{,}78$; находим последовательности:

$$\begin{array}{l} 1{,}78\qquad\qquad;\ 1{,}772\,469\,80;\ 1{,}772\,453\,85; \\ 1{,}764\,939\,59;\ 1{,}772\,437\,89;\ 1{,}772\,453\,84. \end{array}$$

Поэтому: $\sqrt{\pi} = 1,772\,453\,85$. Далее:

$$1,33 < \sqrt{1,7724\ldots} = \sqrt[4]{\pi} < 1,34;$$

след., $a_1 = 1,34$. Арифмометр дает:

$$\begin{array}{lll} 1,34 \qquad\qquad ; & 1,331\,363\,38; & 1,331\,335\,36; \\ 1,322\,726\,75; & 1,331\,307\,34; & 1,331\,335\,36. \end{array}$$

Поэтому: $\sqrt[4]{\pi} = 1,331\,335\,36$. Далее:

$$1,15 < \sqrt{1,3313\ldots} = \sqrt[8]{\pi} < 1,16;$$

след., $a_1 = 1,16$. Арифмометр дает:

$$\begin{array}{llll} 1,16 \qquad\qquad ; & 1,153\,851\,45; & 1,153\,835\,07; & 1,153\,835\,065. \\ 1,147\,702\,89; & 1,153\,818\,68; & 1,153\,835\,06; & \end{array}$$

Поэтому: $\sqrt[8]{\pi} = 1,153\,835\,065$

с точностью до 10^{-8}. Вычислением с многозначными логарифмами получаем: $\sqrt{\pi} = 1,153\,835\,062\,8\ \ldots$, что отличается от найденного выше меньше, чем на 10^{-8}.

3. Извлечение корня третьей степени.

§ 7.—Создадим три последовательности рациональных чисел

$$\begin{array}{l} a_1,\ a_2,\ a_3\ \ldots\ a_n,\ \ldots \\ b_1,\ b_2,\ b_3\ \ldots\ b_n,\ \ldots \\ c_1,\ c_2,\ c_3\ \ldots\ c_n,\ \ldots, \end{array} \tag{8}$$

первые члены которых некоторые положительные числа, а остальные вычисляются по закону:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1}}{3}; \quad b_n = \frac{a_{n-1}\, b_{n-1} + a_{n-1}\, c_{n-1} + b_{n-1}\, c_{n-1}}{a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1}};$$

$$c_n = \frac{3\, a_{n-1}\, b_{n-1}\, c_{n-1}}{a_{n-1}\, b_{n-1} + a_{n-1}\, c_{n-1} + b_{n-1}\, c_{n-1}} \quad (n = 2, 3, 4, \ldots) \tag{9}$$

Относительно последовательностей (8) заметим следующее: 1) если $a_1 > b_1 > c_1$, то и $a_n > b_n > c_n$; 2) первая из этих последовательностей (при том же предположении, что $a_1 > b_1 > c_1$) убывающая, третья возрастающая; 3) все эти три последовательности имеют общий предел, равный $\sqrt[3]{a_1\, b_1\, c_1}$; 4) из 1) и 2) вытекает, что

$$c_n < \sqrt[3]{a_1\, b_1\, c_1} < a_n\,. \tag{10}$$

Чтобы воспользоваться последовательностями (8) для извлечения корня третьей степени из данного числа N, нужно, во-первых, взяв произвольно два числа, вычислить третье так, чтобы оно было частным от деления числа N на произведение первых двух чисел, и во-вторых, обозначив большее из только что полученных трех чисел через a_1, среднее через b_1 и меньшее через c_1, вычислять по (9) числа a_2, b_2, c_2, затем a_3, b_3, c_3 и т. д. до тех пор, пока числа a_n, b_n, c_n не будут иметь столько одинаковых цифр, сколько цифр должно быть в $\sqrt[3]{N}$.

Число a_n по числам a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1} вычисляется просто; сумму $a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1}$ можно найти или при помощи арифмометра, или (и, может быть, проще) на счетах; разделить эту сумму на 3 легко в уме.

Вычисление b_n более сложно. По (9) имеем:

$$b_n = \frac{a_{n-1}\, b_{n-1} + a_{n-1}\, c_{n-1} + b_{n-1}\, c_{n-1}}{a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1}}.$$

Сумма, стоящая в знаменателе, нами уже вычислена для нахождения a_n; след., нужно только вычислить числитель и затем произвести на арифмометре обыкновенное деление. Числитель вычислится очень быстро без всяких промежуточных записей, если кроме арифмометра пользоваться также и счетами с достаточным числом проволок [1]. Согласно сказанному выше мы можем полагать

$$c_{n-1} < b_{n-1} < a_{n-1};$$

отсюда следует, что (если для краткости письма откинуть подстрочные указатели)

$$b\,c < a\,c < a\,b.$$

Вычислим сначала при помощи арифмометра наименьшее произведение, т. е. bc, взяв c множимым и b множителем. Найдя это произведение, положим его на счеты и *не будем снимать его с машины*. Относительно следующего произведения ac можно заметить, что

$$a\,c = b\,c + c\,(a - b);$$

след., мы получим произведение ac, если к имеющемуся уже на машине произведению bc мы прибавим произведение c на $a-b$; а так как мы взяли множимым число c, то никаких новых установок на машине делать не придется; достаточно лишь продолжать вращать рукоятку арифмометра столько раз, сколько нужно для получения произведения $c\,(a-b)$. Получив таким образом произведение ac, мы кладем его на счетах, прибавляя к тому, которое там уже имеется, и опять *не снимаем его с машины*. Следующее произведение ab преобразовываем подобным же образом:

$$a\,b = a\,c + a\,(b - c);$$

так как на арифмометре у нас уже имеется произведение ac, то для получения ab достаточно к нему прибавить произведение $a\,(b-c)$; след., теперь приходится изменить поставленное на арифмометре умножаемое c и взять вместо него a, что достигается изменением, вообще говоря, лишь немногих цифр. Прибавив произведение $a\,(b-c)$, мы получим произведение ab, которое прикладываем на счетах к тому, что там положено, и получаем искомую сумму $a\,b + a\,c + b\,c$, которую, записав, делим на сумму $a + b + c$.

Для вычисления c_n заметим, что если мы перемножим почленно равенства (9), то получим:

$$a_n\;\; b_n\;\; c_n = a_{n-1}\;\; b_{n-1}\;\; c_{n-1};$$

совершенно так же могли бы написать:

$$a_{n-1}\, b_{n-1}\, c_{n-1} = a_{n-2}\;\, b_{n-2}\, c_{n-2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_2\;\; b_2\;\; c_2 = a_1\;\; b_1\;\; c_1,$$

[1] Для всех подобных вычислений очень удобны большие конторские счеты в 12 или 13 проволок, если на *все* проволоки надеть по 10 косточек.

откуда:

$$a_n\ b_n\ c_n = a_1\ b_1\ c_1 = N,$$

так как, выбрав произвольно a_1 и b_1, мы вычислили c_1 по равенству

$$c_1 = \frac{N}{a_1\ b_1};$$

В таком случае число c_n найдется по равенству

$$c_n = \frac{3\,N}{a_{n-1}\ b_{n-1} + a_{n-1}\ c_{n-1} + b_{n-1}\ c_{n-1}},$$

т. е. простым делением легко вычисляемого числа $3\,N$ на уже вычисленное и записанное число $a_{n-1}\ b_{n-1} + a_{n-1}\ c_{n-1} + b_{n-1}\ c_{n-1}$.

Понятно, что вычисления будут тем короче, чем ближе к значению корня взяты первые два числа. Одно из них может быть избыточным приближенным значением корня, другое недостаточным; или оба могут быть равными между собой (т. е. также избыточными или недостаточными значениями корня). Так если бы пришлось вычислять $\sqrt[3]{105}$, то, заметив, что

$$4 < \sqrt[3]{105} < 5,$$

мы могли бы взять одно число равным 5, другое 4, тогда третье мы нашли бы равным $\frac{105}{20} = 5{,}25$; в таком случае положили бы: $a_1 = 5{,}25$; $b_1 = 5$; $c_1 = 4$. Но мы могли бы также положить $a_1 = b_1 = 5$, тогда нашли бы $c_1 = \frac{105}{25} = 4{,}2$, и эта вторая группа первых чисел была бы для нас более выгодна, чем первая, так как в ней разность между наибольшим и наименьшим числами меньше, чем в первой группе.

§ 8.—Приведем теперь в виде примера вычисление $\sqrt[3]{31{,}45}$. Так как

$$3 < \sqrt[3]{31{,}45} < 4,$$

то за одно число берем 4, за второе 3, третьим будет $\frac{31{,}45}{3 \times 4} = 2{,}620\,833\,3$; полагаем $a_1 = 4$, $b_1 = 3$, $c_1 = 2{,}620\,833\,3$, Обозначив $a + b + c$ через S_1 и $ab + ac + bc$ через S_2, расположим свои вычисления так:

a	4	3,206 944 5	3,156 760 5	3,156 507 9
		52 796 4	252 8	
b	3	3,154 148 1	3,156 507 7	3,156 507 9
		44 959 1	252 2	
c	2,620 833 3	3,109 189 0	3,156 255 5	3,156 507 9
S_1	9,620 833 3	9,470 281 6	9,469 523 7	
S_2	30,345 533 3	29,893 017 0	29,890 626 3	
$3\,N_3$	94,35	94.35	94,35	

След.,

$$\sqrt[3]{31{,}45} = 3{,}156\,507\,9$$

с точностью до 10^{-7}.

Числа, стоящие в приведенном расположении вычислений между строчками, представляют в единицах последнего десятичного разряда разность между соответственными верхним и нижним числом.

Замечание, приведенное в конце § 4 относительно механичности изложенного там способа извлечения квадратных корней, дословно может быть повторено и для извлечения кубичных корней.

§ 9. Если приходится извлекать кубичный корень из приближенного числа, то при данной точности ΔN подкоренного числа N точность корня ε определяется по формуле (6), полагая $n = 3$; для определения же точности ΔN подкоренного числа, нужной для того, чтобы значение корня получилось с заданной точностью ε, служит формула (7) также при $n = 3$.

Пусть для примера требуется определить $\sqrt[3]{e}$ с точностью до 10^{-8}. Применяя (7), полагаем:
$n = 3$; $\varepsilon = 10^{-8}$; $N = e = 2{,}718\,281\,828\,4\ \ldots$; $\sqrt[3]{e^2} = 1{,}9$ (по счетной линейке); тогда

$$\Delta N = 0{,}4.3.10^{-8}.\ 1{,}9 = 2.10^{-8};$$

следовательно, для получения желаемого результата мы могли бы взять e с точностью до двух единиц восьмого разряда; беря $e = 2{,}718\,281\,83$, т. е. с точностью до $0{,}5.10^{-8}$ мы, понятно, не выйдем из вычисленного верхнего предела погрешности. Далее при помощи пятизначных логарифмов вычисляем границы, между которыми находится значение $\sqrt[3]{e}$; получаем:

$$1{,}395\,5 < \sqrt[3]{e} < 1{,}395\,7.$$

Затем при помощи арифмометра определяем $\dfrac{2{,}718\,281\,83}{1{,}395\,5 \times 1{,}395\,7} = 1{,}395\,637\,27$. Поэтому полагаем: $a_1 = 1{,}395\,7$, $b_1 = 1{,}395\,637\,27$; $c_1 = 1{,}395\,5$. Вычисления по изложенному выше способу дают следующие результаты:

a	1,395 7	1,395 612 43	1,395 612 43
b	062 73 1,395 637 27 137 27	1,395 612 42	
c	1,395 5	1,395 612 43	
S_1	4,186 837 27		
S_2	5,843 202 098		
$3N$	8,154 845 49		

Следовательно,

$$\sqrt[3]{e} = 1{,}395\,612\,43$$

с точностью до 10^{-8}. Вычисление с помощью рядов дает $\sqrt[3]{e} = 1{,}395\,612\,425\ldots$

§ 10. Повторным применением разобранного способа мы можем извлекать корни 9,27, …, вообще степени 3^l ($l = 2, 3, \ldots$); умея же извлекать корни степени 2^k [§ 6], мы можем извлекать корни степени $2^k.\,3^l$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$; $l = 1, 2, 3, \ldots$).

4. Извлечение корня какой угодно степени.

§ 11. Распространяя изложенные выше способы извлечения квадратных и кубических корней путем создания двух и трех последовательностей по законам (2) и (9), мы могли бы изложить способ извлечения корня *p-ой* степени (ограничиваемся случаем, когда p есть целое положительное число) следующим образом:

Создадим p последовательностей рациональных чисел:

$$(a_n),\ (b_n),\ (c_n), \ldots,\ (k_n),\ (l_n), \tag{11}$$

первые члены которых, т. е. числа $a_1,\ b_1,\ c_1,\ \ldots,\ k_1,\ l_1$. суть некоторые положительные числа, а остальные вычисляются по закону:

$$a_n = \frac{S_1^{n-1}}{p};\ b_n = \frac{S_2^{n-2}}{S_1^{n-1}};\ c_n = \frac{S_3^{n-1}}{S_2^{n-1}};\ \ldots;\ l_n = \frac{pS_p^{n-1}}{S_{p-1}^{n-1}}. \tag{12}$$

где S_i^{n-1} есть сумма произведений по i чисел $a_{n-1},\ b_{n-1},\ c_{n-1},\ \ldots,\ k_{n-1},\ l_{n-1}$. ($i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ p$).

Тогда следовало бы показать, что

$$\lim_{n \doteq \infty} a_n = \lim_{n \doteq \infty} b_n = \lim_{n \doteq \infty} c_n = \ldots = \lim_{n \doteq \infty} l_n = \sqrt[p]{a_1\, b_1\, c_1 \ldots k_1\, l_1}$$

Для применения этих последовательностей к извлечению корня p-ой степени из числа N выберем произвольно $p-1$ чисел, которые будем считать первыми членами $p-1$ последовательностей (11); последнее же p-ое число определим так:

$$l_1 = \frac{N}{a_1\, b_1\, c_1 \ldots k_1};$$

тогда $\sqrt[p]{N}$ определится как предел каждой последовательности (11) при бесконечно возрастающем n. Однако вычисления тут будут очень продолжительные, так что практического значения этот способ не имеет.

С другой стороны, в своей книге «Zahlenrechnen»[1] проф. Шрутка (Schrutka) приводит способ извлечения корня любой степени, применяя известный способ Хорнера (Horner), которым вычисляются значения целых рациональных функций при заданном значении независимого переменного. Правда, при этом способе арифмометр играет несущественную роль, но все же помогает при вычислении (и в этом случае обыкновенные счеты на мой взгляд оказываются более удобным счетным прибором). В качестве примера могу привести, что вычисление $\sqrt[5]{2} = 1{,}148\,698\,359\,4$ с точностью до 10^{-10} у меня заняло совсем немного труда и времени.

Математический Институт
I Ср.-Аз. Гос. Университета
Июнь 1925 г.

---

[1] Dr. Lothar Schrutka—«Zahlenrechnen». Sammlung Math. Physik. Lehrbücher, № 20. Berlin (Teubner), 1923.

A. Nikolajeff.—Quadrat-und Kubikwurzelziehen vermittelst einer Rechenmaschine.

In der vorliegenden Arbeit ist eine einfache Methode für Quadrat—und Kubikwurzelziehen vermittelst einer Rechenmaschine angegeben. Diese Methode besteht in der Bildung einiger Zahlenfolgen, welche einen gemeinsamen Grenzwert, nämlich die Quadrat-bezw. Kubikwurzel aus der gegebenen Zahl haben.

Um die Quadratwurzel aus irgend einer gegebenen Zahl N zu bestimmen, muss man zwei Zahlenfolgen (a_n) und (b_n) bilden, indem a_1 eine ganz beliebig gewählte Zahl ist und $b_1 = \frac{N}{a_1}$ ist; weitere Glieder werden nach dem Gesetz:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$$

$$b_n = \frac{2N}{a_{n-1} + b_{n-1}} = \frac{N}{a_n} \quad (n = 2, 3, 4, \ldots .)$$

gebildet. Der gemeinsame Grenzwert dieser beiden Zahlenfolgen ist $\sqrt{N}$.

Desgleichen bildet man für die Kubikwurzel drei Zahlenfolgen (a_n), (b_n) und (c_n), wo a_1 und b_1 ebenfalls ganz beliebig gewählte Zahlen sind, und $c_1 = \frac{N}{a_1 b_1}$ ist; alle andere Glieder werden nach dem Gesetz

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1}}{3}$$

$$b_n = \frac{a_{n-1} b_{n-1} + a_{n-1} c_{n-1} + b_{n-1} c_{n-1}}{a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1}}$$

$$c_n = \frac{3N}{a_{n-1} b_{n-1} + a_{n-1} c_{n-1} + b_{n-1} c_{n-1}} \quad (n = 2, 3, 4, \ldots .)$$

berechnet. Der gemeinsame Grenzwert dieser Reihen ist $\sqrt[3]{N}$.

Alle Rechenoperationen sind vermittelst einer Rechenmaschine ausführbar.

Mathematisches Institut der Mittel-Asiatischen
Staats-Universität.
Juni 1925.